

Ceci est tiré de la version HTML du fichier
<http://alain.alcouffe.free.fr/Marx-maths/chap4.pdf> .

Lorsque Google explore le Web, il crée automatiquement une version HTML des documents récupérés.

CHAPITRE IV

LA DIALECTIQUE HEGELIENNE

ET LES MATHÉMATIQUES

L'analyse hégélienne du calcul infinitésimal est contenue dans la *Science de la Logique*. L'abord de ce texte présente des difficultés de plusieurs ordres qui tiennent, ici, moins à l'absence de repères qu'à leur surabondance, il est vrai, inadaptées pour la plus grande partie à notre objet. Notons, tout d'abord, que la *Science de la Logique* a connu deux éditions assez substantiellement remaniées, la première parue en 1812-1816, la seconde parue en 1832-1845. La préface de celle-ci était datée de novembre 1831, peu de temps donc avant la mort de Hegel; il y rappelle que les livres de Platon ont été remaniés sept fois et regrette, pour sa part, de n'avoir pas le loisir pour les «soixante-dix-sept remaniements» qui conviendraient. Outre des remaniements divers, la seconde édition se distingue précisément de la première par les additions — considérables — apportées aux développements consacrés au calcul différentiel. Ces additions sont les parties les plus «techniques» de l'ouvrage (utilisation de symboles, études précises de fonctions mathématiques, etc....). Dans la seconde édition, elles apparaissent comme des notes. J. T. Desanti, qui a consacré un essai souvent cité à ces développements, écrit: «Il n'est pas indifférent de souligner que l'épistémologie hégélienne du calcul infinitésimal est exposée dans des notes: c'est-à-dire dans un commentaire qui selon «l'ordre des raisons», est produit après l'engendrement des déterminations conceptuelles propres au quantum»⁷⁹. Cet «ordre des raisons» semble recevoir une confirmation de l'ordre chronologique, mais nous pensons qu'il s'agit plutôt une affirmation plus hardie dans le domaine mathématique ou sur le domaine mathématique.

⁷⁹ J.T. Desanti, p. 24.

Nous pensons, même, que Hegel devait disposer de manuscrits de calcul plus importants encore sur le calcul infinitésimal (peut-être ceux-là même que visait Engels) et les raisons pour lesquelles seule une partie a été publiée en deux temps restent inconnues. Il faut indiquer, enfin, parmi les difficultés de cet ouvrage, une particularité soulignée par Hegel au début de son livre qui tient à la nature de la logique et empêche d'en fournir une «présentation»: «on ne peut pas dire à l'avance ce qu'elle est, mais c'est seulement après l'avoir traitée à fond qu'on peut en prendre connaissance»⁸⁰ Il faut, donc, prendre le tram philosophique en marche. Aussi ne faut-il pas s'étonner de la multiplicité des lectures qui en sont faites (et en français, la multiplicité des traductions allant de la conformité à la syntaxe et au vocabulaire français à un respect absolu du texte hégélien) d'autant que la virtuosité dialectique de l'auteur laisse plus d'une fois le lecteur pantois. Engels, dont la familiarité avec les textes de Hegel est certaine, ne pouvait s'empêcher de marquer son étonnement. Citons une de ses notes: «Hegel se tire très facilement d'affaire sur cette question de la divisibilité en disant que la matière est l'une et l'autre, divisible et continue, et en même temps, ni l'une ni l'autre»⁸¹. Dans ces conditions, il serait prétentieux de vouloir résumer en quelques pages «ce que Hegel a vraiment dit sur le calcul différentiel», ce qui, d'ailleurs, conduirait en une chaîne sans fin à remonter l'histoire de la mathématique et de la philosophie, Hegel reprenant Kant reprenant Spinoza.

Néanmoins, nous allons tenter de relever quelques éléments permettant un parallèle entre la position hégélienne et les travaux mathématiques de Marx. Dans cette entreprise, nous utiliserons largement les appareils critiques des éditions de Hegel et les commentaires de Desanti, Fleischman, Kolman, Janovskaja et Smith.

Nos références ne sont sans doute pas exhaustives, mais il est remarquable que si ces textes présentent des points de vue — voire des lectures —; sensiblement différents, ils partagent tous une même approche méthodologique dans laquelle le développement des mathématiques — conçu comme linéaire (et/ou sédimentaire) — serait décisif pour juger Hegel.

On mesure au passage l'abaissement relatif de la philosophie quand on compare l'assurance de Hegel traitant de haut la mathématique et les systèmes de défense révérenciels de ces auteurs. Eugène Fleischmann (1968), comme nous l'avons vu, est le plus radical en la matière: «l'analyse du calcul infinitésimal aboutit à des conclusions que nous croyons - si l'on ose dire ainsi - entièrement a-mathématiques, en sorte

⁸⁰ Hegel, S.L. p. 27.

⁸¹ Engels, 1968. p. 249. Engels ajoute: «Ceci n'est pas une réponse, mais est presque prouvé maintenant».

qu'il est d'autant plus facile de renoncer à leur formulation mathématique exacte». Dans la traduction de la 1^{ère} édition la «note sur le concept de l'infini mathématique» est assortie du commentaire suivant: «Ce très long développement qui recevra encore des adjonctions dans la seconde édition, constitue l'un des passages les plus curieux de l'ouvrage. Hegel y tente à propos des formules mathématiques, une exégèse qui ne peut qu'irriter le spécialiste (...). Si J. T. Desanti a souvent la main un peu lourde du maître d'école faisant la leçon (de mathématique) à Hegel, il a, plus que les autres auteurs mentionnés, le sens de ce que le discours du philosophe peut avoir de validité, y compris dans le champ mathématique ; pourtant dans une paraphrase du texte de Hegel, il introduit une correction (ou un lapsus?) très significatif: Hegel, pour rabaisser les prétentions mathématiques, écrit, au sujet de «la méthode du calcul différentiel qu'il résume dans la formule $dx^n = nx^{n-1}dx$: «on peut se familiariser avec la théorie en peu de temps, en une demi-heure peut-être»: cette demi-heure devient «quelques heures» chez Desanti!⁸²

Mais surtout, nous sommes beaucoup plus réservés sur la clôture «définitive» du discours mathématique sur l'infini (et partant sur le calcul différentiel): «l'étape finale du calcul infinitésimal classique, celle qui est représentée par les grands traités d'analyse de la fin du XIX^e siècle» n'a sans doute pas prononcé «le» dernier mot⁸³. Il convient, tout d'abord, de replacer les développements de Hegel sur le calcul différentiel dans la problématique hégélienne de l'opposition fini/infini et de son développement.

A — Le Fini et l'Infini chez Hegel

La science de la logique.

Comme nous l'avons déjà souligné, il est difficile de présenter succinctement la *Logique* de Hegel en raison de son contenu même. Hegel, en effet, y entreprend une révision critique de toute la philosophie occidentale et plus généralement de toute philosophie basée sur une scission entre un objet (de la connaissance) et un sujet (qui connaît ou cherche à connaître). Ce rejet de la scission objet/sujet a pour conséquence qu'il n'y a pas lieu de «présenter un objet ou un contenu à

⁸² Cf. pour Fleischmann 1968. p. 103; pour les traductions de Hegel (1^{re} édition, note de la page 236 ; pour Desanti, p. 54 ; (on pourra comparer avec le texte de Hegel SL p 304 ou WL p. 322).

⁸³ C'est Bourbaki, p. 249, qui parle «d'étape finale», et Desanti, p. 55, qui écrit au sujet de Hegel: «Lagrange lui paraît l'homme qui a prononcé le dernier mot», comme nous le verrons, cela n'est pas correct en ce qui concerne Hegel.

connaître»; «l'objet de la philosophie n'est pas un objet immédiat»⁸⁴. C'est précisément à la logique qu'il revient d'être la science de la pensée en général, c'est-à-dire d'éclairer les conditions formelles de la connaissance véritable en faisant abstraction de tout contenu de départ.

La théorie de l'être

La *Logique* est organisée autour d'une grande triade: l'être, l'essence et le concept⁸⁵. Le plan de l'«être» est l'immédiateté, la volonté de saisir l'objet directement, sans faire intervenir la structure subjective à travers lequel il est nécessairement conçu. Le plan de l'essence, (la scission objet/sujet), conduit à reconnaître l'objet de r«extérieur», c'est-à-dire que l'objet apparaît comme un «phénomène». Ainsi ce qui apparaît au début n'est pas tenu pour essentiel, et l'«essence» sera ce qui est vu par l'esprit et qui n'apparaît pas au début. Le «concept» couronne cette triade en accrochant objet et sujet. Puisque le plan de la pensée sur un objet doit être dépassé, puisque l'objet en soi se dissout en un processus de réflexion, la réflexion prend la place de l'objet et, comme elle est, elle-même, pensée, sujet et objet s'identifient de sorte que la pensée se découvre soi-même comme son véritable objet. Dans cette progression, Hegel croit pouvoir s'appuyer sur l'histoire de la philosophie occidentale, chaque moment de la triade renvoyant à une étape historique, le plan de l'être à l'Antiquité et au Moyen Age, celui de l'essence au XVIIe (Descartes, Leibniz), le dernier, celui du concept, à Kant et à Fichte pour culminer dans la logique de Hegel précisément.

Pour être fidèle à Hegel, il nous faudrait suivre ces trois moments et parcourir, ainsi, jusqu'à son terme, «le chemin du doute et du désespoir»⁸⁶, pour accéder au «concept». Plus modestement, nous nous contenterons de repérer comment Hegel introduit ses réflexions sur le calcul infinitésimal mais cela nous obligera à présenter au moins les grandes articulations de la première partie (Livre I) de la *Science de la Logique* consacré à l'être. Ce bout de chemin lui-même n'est pas particulièrement aisé,

⁸⁴ Hegel. EL §1.

⁸⁵ Cette présentation de la «grande made» est librement extraite du chapitre II de Fleischmann 1968. Nous ne voudrions pas, cependant, abriter notre résumé hardi de l'autorité de cet auteur dont nous ne partageons pas le jugement sur Hegel et les mathématiques et qui ne peut donc être tenu pour responsable de notre interprétation de Hegel; c'est pourquoi nous ne marquons pas plus précisément nos emprunts, si bien volontiers nous reconnaissons leur importance et l'aide que la lecture de Fleischmann nous a apportée. Pour ce qui est du dernier terme de la triade, «compréhension» qui désigne plus spontanément un processus et contient l'idée d'arrimage (appréhender) rend mieux, à notre avis, le terme allemand de Begriff (greifen = savoir, prendre, appréhender) que le terme de concept.

⁸⁶ L'expression est de Hegel dans la préface à la *Phénoménologie de l'Esprit*, nous ne croyons pas la reprendre à mauvais escient, ici.

heureusement nous y ferons, croyons-nous, des découvertes suffisamment importantes pour justifier notre détour.

Mais avant de s'engager dans cette voie, il nous faut nous arrêter aux quelques notations introductives que fournit Hegel sur son projet de logique. En effet, il y apparaît une similitude certaine avec l'ambition de la mathématique et plus précisément de la logique formelle. C'est ce que Hegel indique lui-même dans l'introduction de la *Science de la Logique*: «Jusqu'à présent, la philosophie n'a pas encore trouvé sa méthode, elle regardait avec envie l'édifice systématique de la mathématique et lui empruntait sa méthode»⁸⁷: C'est précisément pour éviter ce recours qu'il va construire sa logique, donc, présenter une méthode concurrente. Hegel, d'ailleurs, rejette vigoureusement le recours à la méthode des mathématiques et en particulier les «égarements» de Leibniz qui était allé, effectivement, jusqu'à confondre le penser et le calculer. Pour ce faire, Hegel renvoie tout d'abord à ce qu'il dit de la méthode mathématique dans la *Phénoménologie de l'Esprit*, et revient encore à plusieurs reprises sur ce sujet dans la *Logique*. Fondamentalement, Hegel soutient que la mathématique s'en tient au premier des trois plans qu'il a distingué: il y a une extériorité entre l'objet de la mathématique et la réflexion qui est un avatar de la scission sujet/objet. Ne parvenant pas ainsi à s'élever jusqu'au «concept», la mathématique reste «subordonnée» (ou inférieure). Sans s'engager dans cette discussion, relevons immédiatement que l'état du calcul infinitésimal avant Lagrange et en particulier la version newtonienne avec son appel à l'intuition justifiait plutôt la façon de caractériser les mathématiques propre à Hegel. Aujourd'hui les tentatives de reconstruction des mathématiques laissent la question plus ouverte — ainsi nous trouvons assez discutable l'argument avancé par Biard et alii: «(dans les mathématiques), le penser apparaissant comme simplement formel, il ne peut que présupposer un contenu destiné à le remplir»⁸⁸.

Mais il convient à présent, de nous rapprocher plus précisément du traitement hégélien de l'infini dans la *Logique de l'Être*.

L'infinité qualitative

La *Logique de l'Être* s'organise autour de trois déterminations: la qualité, la quantité, la qualité quantitativement définie: la mesure. C'est dans le chapitre sur la quantité que se situent les notes sur le calcul infinitésimal. Mais il faut noter que Hegel insiste sur l'antériorité de la qualité par rapport à la quantité. En effet, Hegel prend, comme point de départ, l'être pur, c'est-à-dire l'être le plus simple qu'on puisse penser, une «intuition vide ou une pensée vide» et il montre comment la qualité (la détermination) est indissociable de ce point de départ, catégorie sans laquelle celui-ci se

⁸⁷ SL p. 39 WL t. I, p. 48.

⁸⁸ Biard et alii. p. 11.

dissoudrait totalement. Au contraire, «la grandeur est une propriété qui ne fait plus un avec l'être, mais en est devenue distincte: elle est la qualité supprimée/conservée»⁸⁹.

C'est précisément parce que, dans la section consacrée à la qualité, Hegel a étudié la relation du fini et de l'infini qu'il se sentira autorisé dans la section consacrée à la quantité à parler du calcul infinitésimal. Naturellement, ce renversement du rapport qualité/quantité qu'opère Hegel par rapport à la philosophie kantienne ne signifie nullement une correspondance chronologique dans l'élaboration de sa pensée; on peut même dire que son vocabulaire pour exprimer la «qualité» est infesté de termes du calcul infinitésimal — bornes, limites, différences. Parfois d'ailleurs, le vocabulaire de Hegel anticipe sur des distinctions qui ne seront opérées que plus tardivement par les mathématiques: c'est ainsi que la distinction borne/limite introduite par Hegel n'existait pas dans les mathématiques de son époque où la notion de limite était floue⁹⁰. Mais cette influence ne doit pas masquer la subordination dans laquelle Hegel tient le quantitatif par rapport au qualitatif et nous pensons qu'isoler les remarques sur le calcul infinitésimal du rapport fini/infini mutile gravement la démarche de Hegel⁹¹.

Celle-ci s'inaugure, par l'être pur dont il montre qu'il est la même chose que le néant, entendant par là qu'ils sont également abstraits, dépourvus de détermination et qu'on ne peut les penser qu'à partir du devenir, dans «ce mouvement de passage de l'un dans l'autre»⁹². Ainsi, le chapitre sur l'être est surtout l'occasion pour Hegel de régler leur compte à la philosophie de ses prédécesseurs et le départ véritable est constitué par l'être déterminé ou défini, (le Dasein). Hegel présente successivement l'être déterminé, la finitude (ou le fini) et enfin l'infini. Il relève, dans sa définition de l'être déterminé le caractère double de la détermination: il y a l'aspect de la réalité et celui de la négation. Hegel reprend ici la proposition de Spinoza: «omnis determinatio est negatio» (toute détermination - affirmation positive - est, en même temps, dénégarion)⁹³. C'est cette dialectique de l'affirmation et de la négation qui permet à Hegel de dépasser la conception traditionnelle du fini. Celle-ci avait fini par enfermer le fini, confondu avec ce qu'il y a de stable, de fixe. Au contraire, pour Hegel, dans le fini se manifeste en permanence l'instabilité et le changement. Il est intéressant de suivre précisément le raisonnement de Hegel pour y

⁸⁹ Hegel. SL p. 70, WL, p. 80.

⁹⁰ Cf. *infra*, p. 287.

⁹¹ J. T. Desanti dans son essai, ne fait aucune mention des traitements de l'infini qualitatif. Cette omission aurait mérité, à tout le moins, une explication.

⁹² Hegel SL p. 73, WL, p. 83.

⁹³ *Ibidem* Si, p. 109, WL, p. 121.

relever tout ce qu'il doit au calcul différentiel, bien que dans cette «théorie de l'être» il n'en soit nullement fait mention. Tout d'abord, dans le «quelque chose» que la pensée détermine, l'attribution d'une qualité le situe par rapport à une chose autre qu'il aurait pu être et cette détermination va se traduire ensuite par l'apparition d'une délimitation ou d'une «limite»⁹⁴. [On peut remarquer, au passage, que tous les exemples — les premiers de l'ouvrage — fournis par Hegel ont sans exception un caractère mathématique: géométrie avec le point, la ligne, la surface, arithmétique: «le centième est à la fois la limite, mais aussi l'élément de la centaine entière»]⁹⁵. Mais la limite appelle un dépassement et ainsi le fini qu'elle sert à définir ou à constituer apparaît d'emblée comme instable.

Hegel introduit alors un nouveau couple «devoir-être/borne» pour affiner le précédent, «détermination/limite» = Le «devoir-être» représente le processus toujours renouvelé de dépassement, d'altération du quelque chose tandis que la «borne» rappelle la fixité de «la limite». Le «devoir-être» n'est pas introduit de l'extérieur, mais si l'on prend en compte, le stade extrêmement élémentaire où se situe la démarche hégélienne, l'idée d'une détermination vide, qui caractérise l'être-là, appelle une détermination plus concrète, et même si on ne sait pas encore ce que sera ce nouvel élément, il est là, en un sens, par contraste. Le devoir-être est, donc, déjà un dépassement de la «borne», un dépassement du fini, mais il est abstrait et unilatéral parce que déterminé exclusivement à partir du fini. Le fini et sa négation - «le mauvais infini» - sont dans une position de détermination réciproque.

Mais alors «le fini et l'infini forment ensemble le fini». Le véritable Infini sera la négation de cette finitude. Ainsi le Fini et l'Infini ont chacun un double sens :

Le double sens du Fini consiste en ce qu'il n'est le Fini que par rapport à l'Infini en présence duquel il se trouve ; et aussi dans ce qu'il est à la fois le Fini et cet Infini en présence duquel il se trouve. L'Infini a également un double sens qui consiste en ce qu'il est un de ces deux moments (tel est le cas du faux Infini) et qu'il est l'Infini

⁹⁴ «Quelque chose» ou «chose autre» ne doivent pas être pris ici comme des termes génériques désignant des objets concrets. Il s'agit là de structures abstraites comme le souligne Fleischmann. On pourrait, d'ailleurs, peut-être, rendre mieux l'«Etwas» par le «ça» si ce terme n'avait reçu une autre acception. Il faut relever néanmoins que, ici et là, Hegel semble fournir des illustrations — ce qui n'est pas superflu, vue l'aridité du raisonnement — mais introduit des ambiguïtés.

⁹⁵ Ibidem, SL p. 126, WL p. 138.

qui ne contient lui-même et son autre que comme des moments⁹⁶. En résumé, dans le vrai Infini trouvent leur unité, deux paires contradictoires, la paire affirmative du «quelque chose» et de la «limite», la paire négative du «devoir-être» et de la «borne», mais cette unité n'est pas «l'unité en repos de deux termes identifiés l'un à l'autre par l'évanouissement de leurs différences»⁹⁷, mais «elle ne peut être conçue essentiellement que comme un devenir»⁹⁸.

Parvenu à ce point qui achève, pour l'essentiel, la présentation de l'infini qualitatif, on a, sans doute, été souvent tenté de s'arrêter en route: Fleischmann parle «des longueurs inexcusables de l'exposé hégélien» et pour notre part, nous reconnaissons avoir pris quelques raccourcis — éliminant l'«être-en-soi» et l'«être-pour-un-autre» — (il est vrai que l'exposé de Hegel lui-même, de 1832 dans *L'Encyclopédie* est nettement abrégé sur les thèmes considérés). Pourtant, il nous semble que nous ne nous sommes pas égarés et qu'il valait la peine de découvrir les énoncés auxquels nous sommes parvenus. En effet, que nous apprend Hegel? L'infini (le vrai) «contient» l'infini (le mauvais). Il faut que la terminologie hégélienne soit bien opaque pour qu'à notre connaissance, la ressemblance de cet énoncé avec le théorème de la théorie des ensembles selon lequel «tout ensemble infini I est équivalent à un sous-ensemble de I»⁹⁹) n'ait jamais été relevé. Certes, le «vrai infini» de Hegel entretient avec le mauvais infini» une relation plus complexe que les ensembles «infinis» qui sont équivalents avec l'un de leurs sous-ensembles et que Russel a appelé «réflexifs», mais, après les «maîtres du soupçon» qui nous ont appris à voir causes cachées et antécédents aussi obscurs qu'ils soient, on aurait pu penser que la quasi-coïncidence des énoncés considérés ne serait pas passée inaperçue. Nous n'entendons pas ici conduire une comparaison systématique de la logique mathématique et de la logique dialectique¹⁰⁰ mais un élément — au moins — incite à penser que la coïncidence n'est pas fortuite, que ce n'est pas, pour reprendre une expression de G. Granel, dans «une espèce de somnambulisme» que Hegel est parvenu à sa formulation: la démonstration du théorème indiqué repose sur une partition en - au moins - deux sous-ensembles et une comparaison systématique de l'un de ces sous-ensembles avec l'ensemble infini; or, toute la démarche de Hegel repose, aussi, sur une partition entre

⁹⁶ Ibidem, SL p. 151, WL p. 163.

⁹⁷ Biard, p. 92.

⁹⁸ Hegel. SL p. 151. WL p. 163.

⁹⁹ A. Fraenkel fournit 2 démonstrations de ce théorème cf. A. Fraenkel, 1966 pp. 27.

¹⁰⁰ A. Fraenkel écrit que «l'infini actuel a été discuté après Aristote par de grands philosophes tels (...) Descartes. Spinoza. Leibniz. Locke. Kant. etc. (sic).» (p. 2). Voilà Hegel qui a parlé avec tellement de contemption du « mauvais infini» que représente la progression illimitée, relègue dans un etc.!

le «quelque chose» et le «chose-autre» a l'intérieur de l'«être-là» et c'est de cette dialectique que Hegel tire son affirmation. A cela s'ajoute encore la proximité entre certains aspects du raisonnement de Hegel et une «illustration» de l'infini actuel, dont l'origine remonterait à Bolzano, et qui est reprise aussi par Dedekind. Ces auteurs s'interrogent sur la possibilité de concevoir un infini actuel et ils suggèrent l'exemple suivant: soit «la proposition A est vraie», si l'on admet que «la proposition, selon laquelle «la proposition A est vraie» est concevable» [càd distincte de la première proposition et susceptible de détermination par elle-même, d'être donc vraie ou fausse indépendamment de A] et vraie, alors on peut concevoir aussi «la proposition selon laquelle la proposition est vraie selon laquelle la proposition A est vraie» et tenir cette proposition pour vraie. Naturellement, on a affaire là à une progression illimitée. Telle est l'illustration de Bolzano-Dedekind. Quand Bertrand Russell analyse cette illustration, il la replace précisément dans le cadre de la scission objet/sujet :

«L'argument de Bolzano/Dedekind est le suivant: l'objet et son idée ne se confondent pas mais il y a une idée de tout objet. La relation de l'objet à l'idée est une relation de «un à un» et les idées sont seulement une partie du milieu des objets. Par conséquent la relation «l'idée de» (dans notre présentation: la proposition selon laquelle...) constitue une réflexion de la classe entière des objets sur une partie d'elle-même, c'est-à-dire la partie que forme les idées. Par conséquent, la classe des objets et celle des idées sont toutes deux infinies ».

Russell trouve l'argument intéressant mais le rejette, nous n'examinerons pas ses motifs, car nous voulons seulement retenir le parallélisme des démarches de Bolzano/Dedekind d'une part et de Hegel d'autre part: dans les deux cas, l'origine se trouve dans la reconnaissance de la scission objet/sujet dont il s'agit d'explorer les conséquences¹⁰¹.

Il faut relever ici que l'affirmation de l'infini actuel est «illustrée» par un processus «idéel» dont le contenu est pratiquement vide et que l'infini actuel est bien présenté d'abord comme une régression (progression infinie). Que l'on relise les paragraphes de Hegel sur le «passage du fini à l'infini ou sur l'infinité affirmative» et l'on verra que c'est bien par la progression infinie — de la pensée et d'une pensée à peine formulée, presque vide — que Hegel nous conduit à l'infini! Ces rapprochements devraient convaincre les plus sceptiques que cela vaut — à tout le moins — la peine d'aller voir ce qu'écrivait Hegel.

¹⁰¹ Cf. Russell, p. 169.

Ce n'est pas l'opinion, apparemment, de R. Blanché dans son manuel d'histoire de la logique qui consacre moins de quinze lignes à Hegel. Il est vrai qu'il n'avance aucun argument, si ce n'est l'argument d'autorité:

«les historiens de la logique, lorsqu'ils ne préfèrent pas la passer complètement sous silence, jugent sévèrement cette déviation de la logique: the curious mixture of metaphysics and epistemology which was presented as logic, dit W. Kneale ; et Jørgensen : the numerous dialectic eccentricities of the later romantic logic, which was altogether ruinous to sound formal logic»¹⁰².

Quant à L. Brunschvicg, s'il est mieux disposé à l'égard de Hegel en général, il ne semble pas avoir été particulièrement attentif à la Science de la logique: en effet, il écrit «Ce qui caractérise l'ensemble infini, c'est qu'il est partie intégrante de lui-même. La théorie des ensembles incorpore à titre d'idée claire et distincte, la notion philosophique de l'infini telle que Kant et Pascal l'avaient déjà rencontrée» ; on notera, tout d'abord, que cet auteur décrit, de façon incorrecte, le théorème de la théorie des ensembles en posant l'identité du «contenant et du contenu». (L'ensemble des entiers naturels est infini et le sous-ensemble des entiers naturels pairs est aussi infini). Mais si cela est bien «la caractéristique» de l'ensemble infini, alors on ne peut dire que Pascal et Kant l'avaient rencontrée et d'ailleurs les citations de ces auteurs, fournies par Brunschvicg, n'indiquent nullement — «l'infini est une grandeur que l'on ne peut augmenter ni diminuer» — l'idée d'un infini au-delà de l'infini que nous trouvons pour la première fois chez Hegel et sous une autre forme dans la théorie des ensembles.

La genèse de la quantité

Dans la démarche de Hegel, l'infinité qualitative n'est pas la dernière étape avant d'aborder la quantité. En effet, il s'efforce, encore, en restant dans le plan de la qualité, de faire surgir la quantité. Sans prétendre résumer les longs développements de l'«être-pour-soi» qui font intervenir de multiples catégories traduisant la richesse de l'analyse hégélienne mais obligeant à passer par une terminologie qui est - au moins en français - aussi rebutante qu'elle peut être éclairante, nous croyons utile d'insister sur quelques points. Partant de l'«être», (c'est-à-dire aussi bien du «néant»), Hegel est parvenu en étudiant l'«être-là» (c'est-à-dire «l'être déterminé») à l'infinité qualitative qu'il illustre par l'image du cercle. Parvenu à ce point et soucieux de bien montrer l'opposition entre le «mauvais infini» et le «vrai infini», Hegel recourt à l'exemple suivant :

¹⁰² Cf. R. Blanché p. 248. L. Brunschvicg, p. 238.

«L'image de la progression à l'infini est représentée par la ligne droite, aux deux limites de laquelle il n'y a que l'Infini, et celui-ci n'existe toujours que là où la ligne (qui est un être-là) s'avance vers son non-être-là, c'est-à-dire vers l'Infini. Quant à la véritable Infinité, revenant à elle-même, son image est représentée par le cercle, c'est-à-dire par la ligne qui a réussi à se rejoindre, qui est close et tout à fait sans commencement ni fin»¹⁰³.

Après avoir souligné le caractère «mathématique» de l'illustration hégélienne, nous notons que cette image marque bien la fermeture sur soi à laquelle nous parvenons en étudiant «l'être-là», ce que Hegel appelle «l'être-pour-soi». Mais ce repliement attire négativement l'attention sur l'altérité. Le «un» (pris au sens d'unité) appelle, produit le «multiple», l'unicité renvoie à la multiplicité, la résorption des différences qualitatives va faire apparaître la «quantité».

Le traitement de la quantité présente une grande ressemblance avec celui de la qualité. Il se développe en trois chapitres : la quantité pure, le quantum et le rapport quantitatif faisant pendant à l'être pur, l'être-là et l'être-soi. L'infinité quantitative apparaît, ainsi, au milieu de la progression (dans l'étude du quantum), comme l'infinité qualitative apparaissait dans l'étude de l'être-là. Cette analogie n'est pas un pur décalque, néanmoins, malgré l'intérêt de remarques de Hegel sur l'opposition continu/discret, sur l'origine du nombre, etc. nous nous appuyerons sur elle pour nous contenter d'une brève esquisse de ce qui précède directement les remarques hégéliennes sur le calcul infinitésimal.

Il est important de rappeler la nature de la démarche hégélienne qui se veut explication du penser, conduite sans présupposés. Ici nous sommes parvenus à la quantité qui est apparue comme résultant d'une tension entre unité et altérité ou homogénéité et hétérogénéité. C'est en appuyant sur cette seule genèse que Hegel va introduire la continuité et la discontinuité renvoyant respectivement à l'unité et à l'altérité. Le traitement hégélien de la continuité et de la discontinuité rappelle celui de l'être et du néant, à cette différence que pour Hegel le continu et le discontinu s'incluent mutuellement. Il n'y pas d'équivalent du va-et-vient de l'être et du néant mais une implication mutuelle. La grandeur constitue l'unité négative du continu et du discontinu. Mais cette position instable appelle une délimitation entre ces deux aspects de la quantité. Ainsi apparaît le «quantum» ou la «quantité déterminée». La précision du quantum s'effectue grâce au nombre dont la naissance est ainsi présentée de façon purement logique. L'enchaînement des déterminations conduit au degré (opposition nombres cardinaux et ordinaux) et au changement quantitatif débouchant sur le progrès infini. C'est l'occasion pour Hegel de se livrer à

¹⁰³ Hegel, SL p. 152; WL p.164.

un examen de la nature des mathématiques et de leur utilisation de l'infini. L'enchaînement part de la transformation du «quantum»: ce qui limite un «quantum», c'est un autre «quantum» plus grand. Donc, la limite du quantum reste de l'ordre du quantitatif (à la différence de la limite qualitative: au-delà d'une qualité particulière, on a affaire, à une qualité autre). On tombe, donc, en opposant la limite au quantum dans une progression illimitée — le «mauvais infini quantitatif». Est-ce à dire que les mathématiques ne saisissent pas le vrai infini? Ici Hegel défend la mathématique en partant des définitions de l'infini mathématique: si celui-ci est «une grandeur après laquelle il n'existe pas de grandeur plus grande» alors il n'est plus un quantum» «puisque «une grandeur en mathématique est définie comme quelque chose qui est susceptible de subir une augmentation ou une diminution; donc, d'une façon générale, comme une limite indifférente»¹⁰⁴. Dès lors la thèse de Hegel s'articule ainsi: l'infini mathématique, d'après sa définition échappe en quelque sorte au quantitatif, c'est ainsi bien le vrai concept de l'infini (qualitatif) qui inspire les mathématiques. C'est ce qui explique la fécondité de son utilisation en mathématiques, mais en même temps comme les mathématiciens ne l'ont pas reconnu, cela explique également les difficultés qu'ils rencontrent et à la résolution desquelles Hegel entend apporter une contribution décisive. C'est l'objet des fameuses «remarques» du chapitre II, section II de la Logique, mais avant d'en aborder l'examen, il convient de préciser la place de la formalisation dans la théorie de la science ou du savoir- de Hegel.

B — Formalisation et conceptualisation

Les «Notes» hégéliennes sur le calcul différentiel n'ont eu, à notre connaissance, aucune influence directe et explicite sur le développement des mathématiques et, en général, les commentaires qui en ont été faits leur dénie même tout sens mathématique. Il s'agirait d'un discours extérieur aux mathématiques dont la validité — et l'intérêt — relèverait essentiellement de la philosophie. Il y a quelques explications à cet état de fait. Tout d'abord, les remarques générales sur le discours hégélien et sa réputation pas tout à fait usurpée d'obscurité sont valables ici, ensuite Hegel ne s'embarrasse pas toujours de la délimitation des domaines de validité de ses propositions. Cette absence choque aujourd'hui le lecteur frotté aux mathématiques contemporaines. Il est cependant équitable de faire remarquer que bien des manuels du début du XIXe de mathématiques ne se souciaient pas plus que Hegel de ces questions. Il faut également indiquer que le vocabulaire mathématique a considérablement évolué depuis le XIXe et évoluait au moment même ou

¹⁰⁴ Ibidem, SL. p. 267 WL, pp. 282/283.

Hegel écrivait, aussi pour évaluer la portée mathématique éventuelle des raisonnements hégéliens convient-il de replacer leur formulation dans le langage mathématique de son époque. Nous avons déjà signalé la capillarité du vocabulaire hégélien et mathématique (limite, bornes, différences...). D'autres formulations, encore, correspondent à des emprunts aux mathématiques, ainsi dans le passage suivant quand Hegel distingue dans l'objet du calcul différentiel :

« 1° Des équations: plusieurs grandeurs (nous pouvons, d'une façon générale, nous en tenir à deux), y sont réunies et forment un Tout qui trouve sa précision en des grandeurs empiriques formant pour ainsi dire ses limites fixes, ainsi que la manière dont les grandeurs en question sont associées à ces grandeurs empiriques, et entre elles, comme c'est généralement le cas des équations; mais comme il n'y a qu'une équation pour les deux grandeurs (de même que, relativement, plusieurs équations pour plusieurs grandeurs, mais toujours en nombre moindre que celui des grandeurs), ces équations font partie de la catégorie des équations indéfinies; et, d'autre part, la précision que possèdent ces grandeurs tient à ce qu'elles (ou, du moins, l'une d'entre elles) existent dans l'équation à une puissance *plus élevée* que la *première*.

A ce propos, il convient de faire quelques remarques. En premier lieu, les grandeurs, d'après la première des déterminations que nous donnons ici, possèdent tout à fait le même caractère de grandeurs variables que celui que présentent les grandeurs figurant dans les problèmes de l'analyse indéfinie. Leur valeur est l'indéterminée, mais de telle sorte que si l'une d'elles reçoit d'ailleurs une valeur parfaitement précise, une valeur numérique par exemple, l'autre devient définie à son tour, si bien que l'une est fonction de l'autre »¹⁰⁵.

La présentation hégélienne ne doit pas surprendre, c'est que le concept de fonction ne faisait qu'apparaître à la fin du XVIIIe-début XIXe et la définition de Hegel supporte la comparaison avec la remarque suivante de l'historien des mathématiques, C. Boyer:

¹⁰⁵ Hegel, SL p. 308. WL p. 326.

«D'Alembert — comme Newton et Leibniz — semble penser non pas à une fonction, mais aux deux membres d'une équation dont les limites sont égales»¹⁰⁶.

Cette formulation, par conséquent, témoigne plutôt d'une bonne compréhension des mathématiques de l'époque. C'est pourquoi nous estimons qu'il ne faut pas tirer de conclusion hâtive de l'absence de formalisation dans la *Science de la Logique*. Au contraire nous sommes persuadés que Hegel se basait sur des travaux mathématiques pour avancer dans sa démarche, travaux peut-être personnels ou tout au moins revue de première main des grands mathématiciens. Nous pensons également que telle était l'opinion de Marx et d'Engels (peut-être cette opinion se fondait-elle sur des renseignements relatifs au contenu des manuscrits laissés par Hegel comme la lettre d'Engels à Lange le laisse entendre¹⁰⁷, et que Marx a cherché à retrouver, à développer cette base de la Logique. Cet arrière-fond hégélien est ainsi un clé essentielle des MMM. Un économiste ne trouvera sans doute pas ces affirmations paradoxales même si elles demandent quelques éclaircissements; en effet, nous savons que de très grands économistes mathématiciens se sont efforcés de reléguer les démonstrations par lesquelles ils faisaient progresser l'économie mathématique dans d'obscurs appendices tandis que leurs manuels ou leurs principes ne contenaient qu'un minimum d'indications formalisées. Même si dans l'économie contemporaine, la «démonstration mathématique» tend à occuper sinon toute la place, au moins la première place, nous estimons impossible de tirer des conclusions de l'absence de formalisation et nous croyons nécessaire de procéder à une évaluation préalable de cette" formalisation et de la restituer dans son contexte historique. Mais avant de nous tourner plus avant vers ces problèmes, nous soulignerons encore que notre interprétation éclaire la lettre de Engels:

«Ainsi ce vieil Hegel avait raison quand il disait que la conclusion fondamentale de la différentiation était que les variables soient élevées à des puissances différentes et que l'une au moins soit à la puissance 2 ou 1/2. Nous savons maintenant pourquoi».

Engels reçoit les MMM comme la démonstration qui ne figure pas — ce qui ne signifie pas que Hegel ne l'avait pas — dans la *Science de la Logique*. Il faut relever, en passant, que la réaction de Engels est très elliptique et quelle indique, par sa brièveté même, et la familiarité avec la Logique de Hegel et sans doute un travail et des discussions communes

¹⁰⁶ C. Boyer. p. 254.

¹⁰⁷ Cf. supra, p. 24.

sur ces sujets. Faut-il aller plus loin dans cette interprétation de Engels et penser que ce n'est pas seulement dans le cas de la différenciation que Hegel pourrait avoir eu des «démonstrations» — une formalisation mathématique du raisonnement — sans la publier ? Nous pensons que cela est possible et que pour répondre ainsi on peut s'appuyer sur le texte même de Hegel, en effet il conclut ces notes par une évaluation générale de la symbolique que nous reproduisons ci-dessous :

Aussi longtemps qu'on ne se sert de l'expression potentielle qu'à titre de symbole, on ne peut pas plus blâmer ceux qui le font qu'on ne blâme ceux qui se servent de nombres ou de symboles d'une autre nature à la place de concept; mais ce procédé mérite les mêmes reproches que la symbolique en général, destinée à exprimer de pures déterminations conceptuelles ou philosophiques. La philosophie n'a pas besoin d'une aide pareille, qu'elle soit empruntée au monde sensible ou l'imagination ou même aux sphères de son propre domaine, car lorsque ces sphères ont un caractère subordonné, les déterminations qui leur sont empruntées ne sont pas applicables aux sphères plus élevées et au Tout. C'est ce qui arrive, lorsqu'on applique, en général, à l'Infini les catégories du Fini; les déterminations courantes de force, de substantialité, de cause et d'effet, etc., ne sont, elles aussi, que des symboles servant à l'expression de situations vivantes et spirituelles par exemple, autrement dit elles sont de déterminations non conformes à la vérité ; et ceci est vrai, à plus forte raison, des puissances du quantum et de puissances dénombrées lorsqu'on les emploie pour l'expression de situations de même genre et de situations spéculatives. Si l'on veut se servir de nombres, de puissances, de l'Infini mathématique, etc., non à titre de symboles, mais à titre de formes pour les déterminations philosophiques, voire de formes philosophiques comme telles, on doit commencer par montrer en quoi consiste leur signification philosophique, autrement dit quelle est leur précision conceptuelle. Si l'on y réussit, tous ces symboles deviennent des désignations superflues; la précision conceptuelle se désigne elle-même, et c'est cette désignation qui est la seule correcte. L'emploi des formes dont nous venons de parler ne constitue rien de plus qu'un moyen commode de s'épargner la peine de rechercher les déterminations conceptuelles, de les développer et de les justifier»¹⁰⁸.

Nous sommes frappés dans ce texte, tout d'abord, par la distinction opérée par Hegel monde sensible/imagination/sphères philosophiques subordonnées. Il y a là une oscillation du vocabulaire importante : la mathématique, sphère subordonnée à la philosophie ou de la philosophie? Dans le contexte, il apparaît que la mathématique qui est dans une

¹⁰⁸ Hegel. SL. pp. 366-367; WL p. 386.

situation limite entre le sensible et le philosophique tend à être comprise dans ce dernier. Mais, pour la question qui nous occupe ici, c'est la fin du texte qui est la plus intéressante ; elle donne une grande plausibilité à notre hypothèse d'un Hegel pratiquant les mathématiques pour développer son raisonnement, mais considérant ces démonstrations «superflues», le résultat, c'est la précision conceptuelle, atteinte. Dès lors, la publication de ces notes mathématiques ne serait qu'une concession aux lecteurs qui «s'épargnent la peine de rechercher les déterminations conceptuelles» comme une expérience de presque vingt ans avait du en convaincre Hegel — en effet, la seconde édition développe les indications de la première, mais la bibliographie mathématique de Hegel était constituée en 1812 et significativement la seule indication postérieure figure en note de bas de page. Le point a de l'importance dans la mesure où il conditionne la lecture que l'on peut faire des considérations hégéliennes sur le calcul différentiel : discours extérieur, plaqué sur la mathématique et dont la prétention justifierait et la honte rétrospective des philosophes et le mépris hautain des mathématiciens que nous signalons au début ou bien confrontation impliquant l'usage des mathématiques par le philosophe, au moins jusqu'à un certain point. Pour notre part, nous optons résolument pour la seconde branche de l'alternative persuadés que nous sommes que la mathématique ne se laisse pas définir par l'usage d'une formalisation symbolique et qu'il ne faut pas surestimer l'importance des démonstrations. Sur ce dernier point, nous sommes confortés par René Thom :

«On a d'ailleurs très probablement surestimé l'importance de la rigueur en mathématique. De toutes les disciplines scientifiques, la mathématique est celle où la rigueur est a priori la moins nécessaire. Quand un mathématicien X publie la démonstration d'un théorème, son lecteur Y est à même de contrôler les assertions de X. Il peut dire: la démonstration me semble correcte et je suis convaincu; ou bien: je ne comprends pas tel ou tel point, tel lemme me semble peu clair, tel raisonnement a une lacune. Au contraire dans les disciplines expérimentales, la situation est tout à fait différente: quand un expérimentateur A présente le résultat d'expériences faites en son laboratoire, il peut me donner tous les détails voulus quant à la procédure suivie (...). je n'ai aucun moyen de vérifier l'exactitude de ses dires et force m'est de lui faire confiance»¹⁰⁹.

En réalité, nous ajouterions plutôt «ou de procéder à une nouvelle expérience» et ici nous sommes dans une situation assez analogue: c'est en définitive, la fécondité éventuelle de la seconde branche de l'alternative qui tranchera. Mais avant même d'examiner le calcul différentiel de

¹⁰⁹ R. Thom, 1974, pp. 49-50.

Hegel, il faut noter que c'est Hegel lui-même qui affirme la portée mathématique de ses Notes. Quand il écrit: «Nous croyons pouvoir contribuer à l'élucidation de la nature de la chose elle-même»¹¹⁰. Il est d'autant moins possible de voir là un discours extérieur aux mathématiques. c-à-d une interprétation philosophique d'un discours mathématique achevé en tant que tel, que Hegel ne croit nullement que Lagrange — en dépit des mérites qu'il lui reconnaît — ait dit le «dernier mot» C'est très explicitement qu'il attend des développements mathématiques en la matière, — attente qui contredit la lecture de J.T. Desanti — et qu'il les évoque : «le jour où on aura trouvé le moyen d'abstraire autrement qu'on ne l'a fait jusqu'ici de la partie réelle des mathématiques qu'on appelle calcul différentiel le côté général du procédé, les principes dont nous venons de parler et les efforts faits pour les trouver se révéleront inutiles»¹¹¹.

Nous trouvons encore une confirmation de notre interprétation dans le traitement hégélien du nombre. Revenons, pour l'analyser sur l'enchaînement: quantité —> quantum. La quantité apparaît comme le dépassement (négation et conservation) de l'«être-pour-soi» (la qualité saisie en elle-même). Mais alors elle ne contient pas de distinction entre grandeurs continue et discrète. Aussi est-ce poser le «Un» qui va opérer sur le continu une coupure en introduisant des déterminations de la quantité et entraîner le passage de la quantité (pure) aux quanta. Il s'agit d'une des parties de la *Logique* qui a été les plus considérablement remaniée d'une édition à l'autre dans leur formulation. Reprenons la conclusion de la seconde édition:

«Comme le Un est une limite qui inclut les multiples Uns de la quantité discrète, elle les pose comme supprime-conserves en lui. Elle est une limite de la continuité en général de sorte que la différence entre grandeur continue et grandeur discrète perd son importance ou plus exactement, elle est limite de la continuité aussi bien de la grandeur continue que de la grandeur discrète; l'une et l'autre effectuant ainsi le passage aux quanta». Et Hegel enchaîne: «Le quantum, qu'on peut définir tout d'abord et d'une façon générale, comme étant une quantité précise et limitée, n'atteint la précision complète que dans le nombre»¹¹².

¹¹⁰ Hegel, SL, pp. 333-334 et WL p. 353 (il existe d'autres affirmations similaires disséminées dans ces «notes»; ci. p. 267).

¹¹¹ Ibidem, SL p. 308 et WL p. 326.

¹¹² Ibidem, SL pp. 216-217 et WL p. 231 (cf. pp. 80-S3 le sens de supprimé/conservé).

Après cette introduction plutôt hermétique, Hegel entre dans le traitement du nombre proprement dit en partant de la définition du nombre comme rapport (définition qui figure déjà au moins chez Newton). En examinant les deux expressions possibles du nombre (fraction ou série illimitée), Hegel s'efforce d'y introduire la dialectique du fini et de l'infini qu'il a étudié tant qualitativement que quantitativement. Les exemples de Hegel sont les suivants:

$$\frac{2}{7} = 0,285714 \dots \text{ et } \frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + \dots$$

Ici, Hegel, avec délectation, heurte le sens commun des mathématiques en affirmant que «la série infinie est plutôt l'expression finie car déficiente, alors que l'expression soi-disant finie est en vérité, une expression infinie [= en raison de sa plénitude]»¹¹³. Mais il n'en reste pas à cette affirmation paradoxale *prima facie* et en répondant à une objection qu'il s'attendait se voir opposée, il écrit:

«Il est de même de peu d'intérêt pour nous de savoir qu'il y a d'autres fractions que celle que nous avons prises comme exemples et qui transformées en fraction décimale ne donnent pas une suite infime mais chaque fraction peut être exprimée comme une suite infinie pour un système numérique ayant une autre unité»¹¹⁴.

Cette affirmation de Hegel est loin d'être une évidence et ce n'est pas un résultat banal comme on peut s'en convaincre en consultant des ouvrages mathématiques. Pourtant, pour parler comme Engels, «Hegel a vu juste»: la suite des chiffres qui exprime un réel peut être limitée pour une base et illimitée dans une autre, par exemple, 1/3 dans la base 10 sera représentée par la suite 0 (10⁰) 3 (10⁻¹) 3 (10⁻²) 3 (10⁻³) ... , mais dans la base 3, la suite se limitera à 2 chiffres: 0 (3⁻¹) 1 (3⁻²), de même 1/5 dans la base 10 sera représentée par la suite limitée 0 (10⁰) 2 (10⁻¹) mais dans la base 3 par la suite illimitée 0 (3⁻¹) 1 (3⁻²) 2 (3⁻³) 1 (3⁻⁴) ... , 0, 1, 2, 1, se répétant indéfiniment. Il serait difficile ici de soutenir que Hegel énonce un commentaire «philosophique» sur les mathématiques tant il est manifeste qu'il se contente d'énoncer un résultat qu'il n'a pu obtenir que par une manipulation numérique. Nous trouvons très significatif qu'il dédaigne pourtant de publier cette étape «subordonnée»¹¹⁵. Dans ces conditions, on

¹¹³ Ibidem. SL p. 274 et WL p. 290. 114.

¹¹⁴ Ibidem, SL p. 272 et WL p. 288.

¹¹⁵ Cf. pour une introduction aux systèmes de numération Donnedu, pp. 97-106 ou Lexikon der Mathematik, pp. 604-610. La remarque de Hegel sur la transcription des nombres suivant les bases figure dans la le édition de la Logique (cf. traduction française, 1ère édition, p. 245) ce qui confirme notre interprétation: les notes mathématiques de l'édition de 1832 résultent, pour l'essentiel, d'une réflexion antérieure à la le édition elle-même.

comprend mal le reproche qui est régulièrement adressé à Hegel de rester à l'extérieur de la mathématique, d'autant que lui-même rejette expressément cette façon de faire allant jusqu'à reprocher à Barrow d'introduire des catégories développées ailleurs. Le passage suivant démontre le contresens que commettent ceux qui s'imaginent Hegel observant de sa tour d'ivoire philosophique les mathématiques: «Il faut lire le texte même [de Barrow] pour se convaincre que ce procédé [les premières "méthodes" de différenciation] est exposée comme une règle extérieure [souligné par Hegel]» et il poursuit «en généralisant la forme de ces méthodes et en les appliquant aux sciences, Leibniz et Newton ont bien ouvert de nouvelles voies mais ils n'ont pas su enlever à ce procédé son caractère de règles extérieures et lui procurer la justification nécessaire ».

Il est exact, par contre, que Hegel croit effectivement que la délimitation du champ de validité des mathématiques est une nécessité pour la logique telle qu'il l'entend mais il pense également que cela peut faire progresser les mathématiques elles-mêmes et il n'hésite pas plus que ne le fera plus tard Marx à se placer, sans fausse modestie, à l'intérieur même du champ mathématique, «pour contribuer à l'élucidation de la nature de la chose elle-même». C'est que Hegel ne pense pas que le «dernier mot» ait été prononcé, au contraire il insiste sur le développement du «calcul» Cette idée de progression revient constamment: ouverture de «nouvelles voies» par Newton et Leibniz, «Lagrange s'est engagé sur la voie vraiment scientifique». En particulier, la méthode de Lagrange ne lui apparaît pas parfaite. C'est ainsi que, parlant de l'élimination de certains termes pour obtenir la dérivée, Hegel critique l'utilisation du développement en série qui risque toujours de faire apparaître la dérivée comme un résultat approché. C'est là pour Hegel qui, nous allons le montrer, soutient une toute autre — et audacieuse — interprétation, un point absolument capital qui donne d'autant plus de poids au jugement qu'il formule alors sur Lagrange: «La méthode de Lagrange n'est pas exempte de ce défaut»¹¹⁶.

On voit donc que si Hegel ne cite pas de mathématicien ayant marqué l'histoire du calcul différentiel postérieur à Lagrange (il ne cite Cauchy ni Bolzano qu'il aurait pu connaître en 1831), cela ne signifie pas un aval complet à Lagrange, pour autant. Si, comme nous le pensons, les Notes existaient déjà pour l'essentiel sous forme de travaux préparatoires dès avant l'édition de 1S12, alors Lagrange était simplement le dernier chronologiquement¹¹⁷.

¹¹⁶ Hegel (SL, pp. 318/9 et WL pp. 336).

¹¹⁷ Il s'agit d'une mauvaise conception de dy/dx et de ses conséquences pour l'interprétation du membre droit de l'équation. Cf. SL, pp. 337 et WL p. 357.

Comparaison entre le traitement hégélien de l'être et du néant et la place du un et du zéro dans les systèmes de numération.

Le traitement hégélien des nombres fractionnaires corrobore notre hypothèse, mais, avant de poursuivre et d'appliquer notre grille de lecture au calcul différentiel proprement dit, nous pensons utile de revenir au traitement de l'être et du néant pour la tester encore une fois. Reprenons, donc, le chapitre de transition entre la qualité et la quantité — donc entre l'infini qualitatif et le nombre. Ce chapitre, intitulé «l'être-pour soi» contient des développements sur l'«Un» et le multiple. Il représente un des passages du chemin où nous invite Hegel, où les précipices du «doute et du désespoir» sont les plus menaçants au point que Hegel lui-même juge nécessaire d'attirer l'attention sur les difficultés des lignes qui suivent dans un paragraphe préliminaire ¹¹⁸. Le texte ne prétend pas être un exposé mathématique et même, explicitement, le stade où se situe Hegel précède, dans sa démarche, l'objet des mathématiques (càd la quantité). Nous pensons, néanmoins, que ces lignes difficiles sont éclairées si on les rapproche des certaines propriétés des systèmes de numération, rapprochement qui semble légitime puisque nous venons de voir que Hegel manifestement était averti des propriétés liées au choix de la base. En effet, dans les systèmes de numération, on rencontre deux nombres, le un et le zéro dotés des propriétés tout à fait particulières qui les distinguent de tous les autres nombres — or, on ne peut pas concevoir la numération sans penser d'abord le un et le zéro. Supposons résolue la conception du système de numération ; alors, pour construire un système particulier il faudra choisir une base de façon à faire correspondre une suite de chiffres à chaque nombre. Nous avons vu plus haut que, suivant la base, suivant la base cette suite pouvait être ou non illimitée mais si nous nous intéressons maintenant au choix de cette base, nous voyons qu'elle ne peut être ni zéro ni un. On retrouve ici un rapprochement du un et du zéro qui n'est pas sans rappeler celui de l'être et de néant du chapitre I de Hegel. Mais l'on peut poursuivre la comparaison. Suivant le système de numération choisi, à chaque nombre correspondra une suite — différente — de chiffres — qui le représentera, ceci est vrai de tous les nombres sauf du un et du zéro qui seront toujours représentés par la même collection de chiffre — respectivement 1 et 0 (les signes} et 0 n'étant ici que des symboles, la représentation du un et du zéro pouvant être arbitrairement figurée). Ce n'est pas tout; les chiffres renvoient aux différentes puissances, positives, nulles ou négatives, de la base, on peut prendre le chiffre correspondant à b^0 , (la base à la puissance zéro) comme point de repère dans la série des chiffres — ainsi dans la numération décimale, la virgule en France ou le point dans les pays anglo-saxons séparent les

¹¹⁸ Hegel. SL, p. 169 et WL p. 182.

chiffres correspondants aux puissances positives et nulles d'une part et négatives d'autre part. Alors on constate bien, empiriquement, en fonction du choix de la base, un phénomène d'«attraction et de répulsion»: la collection de chiffres sera plus ou moins longue à droite ou à gauche suivant la grandeur de la base choisie. Nous ne savons naturellement pas jusqu'où Hegel connaissait les propriétés des systèmes de numération, mais il n'est pas exclu que le chapitre sur «l'être-pour-soi» soit une tentative pour leur trouver un fondement qualitatif et les décrire «avant l'apparition du nombre». Nous tenons pour encore plus légitime d'utiliser les propriétés du un dans les systèmes de numération, pour éclairer les développements consacrés aux «uns» que nous citons plus haut.

Mais nous pouvons relire le chapitre initial sur l'être et le néant en nous aidant des propriétés des systèmes de numérations. Nous noterons, tout d'abord, que la relation de puissance sur laquelle Hegel insiste beaucoup dans les *Notes II* et *III* sur le calcul différentiel est étroitement liée au problème de la numération — comme nous l'avons indiqué, on construit un système de numération dans une base quelconque à partir des puissances de cette base. Or l'analyse mathématique moderne, qui relève cette invariance commune au un et au zéro quand on change les bases de la numération, pose également:

$$I^1 = I^0 = x^0 = 1$$

Il faut insister sur un point: l'exposant n'est pas un symbole mais désigne des opérations dans lesquelles le nombre exposant intervient en tant que nombre. Ces opérations n'ont rigoureusement pas de sens effectuées avec le zéro ($x^a = x.x...$ La multiplication de x par lui-même doit être effectuée a fois mais alors *quid* si $a = 0$?).

Pourtant, la cohérence de la numération exige: $x^0 = 1$ et en particulier: $I^1 = I^0$, c'est dire qu'elle postule que le zéro et le un sont ici — en tant qu'exposant — identiques.

Il faut réellement que le rejet de la vieille métaphysique ait eu des effets d'entraînement ou d'aspiration incontrôlés pour que — «pendant des dizaines d'années sa philosophie [= de Hegel ait joué le rôle de souffre-douleur et d'épitomé de la mauvaise spéculation pour les sciences empiriques»¹¹⁹ alors même que Hegel a annoncé ce rejet et en a pris acte. Il est surprenant, en effet, que Hegel passe pour un obscur métaphysicien — «entièrement a- mathématique» — quand il s'efforce de montrer que «l'être pur et le néant pur sont, donc la même chose» (càd compte tenu de

¹¹⁹ Gadamer, p. 200.

l'ensemble du raisonnement) ou « «l'être et le néant sont des moments inséparables de l'Un» alors que l'analyse mathématique moderne est conduite, par souci de «rigueur», à poser: $I^1 = I^0$.

En conclusion, nous estimons que la lecture de Hegel est éclairée par l'histoire des mathématiques et leur mouvement et que ce n'est pas un hasard qui justifie ce rapprochement. C'est que, tout d'abord Hegel était «informé» de la pensée mathématique de son époque et surtout avait un sens aigu de son développement depuis les Grecs ; et ensuite de telles rencontres étaient prévisibles entre la logique dialectique de Hegel et la mathématique puisque, dans celle-ci, des situations dans lesquelles se présente «le problème de l'existence éventuelle de synthèse du type : $T + (\text{non } T) \rightarrow S (\dots)$ sont courantes »¹²⁰. Nous n'entrerons pas ici dans une discussion de fond sur la nature des mathématiques mais nous allons montrer concrètement ce rapprochement dans le cas du calcul différentiel.

1 — Hegel et le calcul infinitésimal

C'est en rapprochant le texte de Hegel des développements les plus récents de l'analyse mathématique que nous entendons illustrer la rencontre entre la logique dialectique et l'histoire des mathématiques. Nous distinguerons dans les Notes de Hegel ce qui a trait à la nature des infiniment petits de ce qui concerne les règles de calcul qui portent sur eux. Dans ce développement, nous avons adopté une terminologie qui suit l'usage de Hegel: nous désignons par «différentielles» les différences infiniment petites dx , dy . Il ne s'agit donc pas exactement de ce que la mathématique de la fin du XIXe ou du XXe entend par ce terme (Marx avait été sensible à cette distinction et dans les MMM, il parle de «différentielle» pour les dx , dy , comme Hegel et de «différentiales» dans l'autre sens.

La nature des différentielles — et les nombres non-standards :

Hegel aborde cette question à partir de la définition du nombre comme rapport et de ses deux expressions'-(fraction ou série illimitée). Nous avons vu que c'était l'occasion pour Hegel d'opérer un renversement entre fini et infini et il poursuit en réexaminant la place de l'infini (infiniment grand et infiniment petit) dans les mathématiques. C'est l'objet de la noie I. Suivons Hegel:

La définition ordinaire de l'Infini mathématique est celle-ci: il y a une grandeur après laquelle si elle est l'infiniment grand, il n'existe pas de grandeur plus grande ; ou lorsqu'elle est définie comme

l'infiniment petit, il n'y a pas de grandeur plus petite ; ou encore la grandeur infiniment grande est plus grande, la grandeur infiniment petite plus petite, que n'importe qu'elle autre (.) [or] une grandeur est définie en mathématique comme quelque chose qui est susceptible de subir une augmentation ou une diminution (...) [donc] étant donné que l'infiniment grand et l'infiniment petit ne peuvent être l'un augmenté, l'autre diminué, ni l'un, ni l'autre ne sont plus en fait des quanta¹²¹.

Nous voyons que, d'emblée, Hegel attire l'attention sur la nature de l'infini (sa «qualité», sa «détermination», sa «précision», sa «déterminité», selon différentes expressions hégéliennes et/ou traduction). Ensuite Hegel constate que «dans les équations» [nous avons vu que pour lui cela signifiait aussi fonction! : «x et y doivent [...] avoir la signification de quanta. Or cette signification se perd tout à fait dans ce que l'on appelle les différences infiniment petites, dx, dy qui ne sont plus des quanta et n'ont plus la signification de quanta (...). Ils ne sont plus quelque chose, le quelque chose étant pris comme quantum ; ils ne sont pas des différences finies mais ils ne sont pas non plus rien, un zéro dépourvu de toute détermination (...). Dans ce concept, de l'Infini, le quantum s'élève vraiment à une existence qualitative ; il est posé comme réellement infini ; il n'est pas en tant que tel ou tel quantum mais en tant que quantum tout court»¹²².

C'est bien la qualité de nombre des dx, dy qui fait problème pour Hegel. Que penser de ces propositions? Il est frappant de constater la similitude absolue de cette présentation avec l'introduction à l'analyse non-standard de J. Harthong: «en pratique pour le mathématicien, un nombre n'est entièrement défini que par la suite infinie de toutes ses décimales (...). On ne peut donc spécifier un nombre que si on donne une loi gouvernant la formation des décimales successives, (algorithme qui permet de définir le nombre)». Harthong poursuit: «parmi tous les algorithmes possibles on conçoit aisément que (certains) sont si complexes qu'il faudrait des centaines et des millions d'années rien que pour les énoncer (...) et ces algorithmes que nous sommes capables de décrire sont des cas particuliers extrêmement rares et privilégiés (...). On est ainsi conduit à établir une distinction qualitative entre les nombres»¹²³. C'est la fameuse définition des nombres standards et non-standards.

Depuis Weierstrass, les mathématiciens ne se référaient plus aux infiniment petits que «pour la commodité du langage», quand, en 1960, Abraham Robinson a démontré que les infiniment petits existaient en tant

¹²¹ Hegel, SL, p. 267, WL p. 282. 122.

¹²² Ibidem, SL. p. 279, WL pp. 295-6.

¹²³ Harthong, p. 1197.

qu'objet mathématique ; sa démarche est partie de la réflexion que nous propose Hegel: la définition des nombres réels ne convient pas aux infiniment petits, il faut donc ou les abandonner ou modifier cette définition. C'est la seconde branche de l'alternative que retient Robinson posant l'axiome n° 1 de l'Analyse non-standard: «Il existe une extension R^* des nombres réels R ». Les éléments de R^* sont appelés hyper-réels. Un élément de R^* peut être infinitésimal si $|x| < r$ pour tout nombre positif réel r ; fini si $|x| < r$ pour certaines valeurs positives de r , infini si $|x| < r$, pour tous les nombres réels r . R^* contient ainsi 3 «qualités» de nombres, les réels, les infinitésimaux, les infinis». A côté des nombres infinis admis par Cantor, cet axiome n° 1 affirme, donc, l'existence des nombres infinitésimaux. Avant de reprendre en détail la distinction hégélienne quantum/différentielle (càd pour Hegel les différences infiniment petites dx , dy) il convient de souligner le parallélisme frappant entre traitement hégélien et analyse non-standard, dont nous montrerons qu'il concerne également les règles de calcul avec les infiniment petits¹²⁴. Toutefois, il convient auparavant de préciser la place de l'analyse non standard dans notre argumentation puisque nous appuyons notre défense de la compétence mathématique de Hegel sur elle. Dans ce plaidoyer, nous sommes amenés à opposer le traitement des infiniment petits dans l'analyse non standard à celui des mathématiques modernes. On sait que celles-ci, dans un texte célèbre de Fraenkel, ont rejeté les infiniment petits «à moins qu'un deuxième Cantor ne vienne leur donner un fondement arithmétique inattaquable». Mais ce procédé d'exposition ne doit pas induire en erreur. Robinson n'est pas un anti-Weierstrass et l'analyse non standard, sous bien des égards, est un développement des «mathématiques modernes»- Les développements ultérieurs diront si Robinson est un «deuxième Cantor». Il est vrai que cela ne manque pas d'ambiguïté en 1984 : alors que dans l'esprit de Fraenkel en 1928 il s'agissait d'un compliment, aujourd'hui, certains mathématiciens se demandent si le «paradis» où les a conduit Cantor n'était pas un «paradis artificiel»! La logique dialectique: une parenthèse sur la traduction de Hegel: Parvenu à ce point de notre lecture de Hegel à la lumière des développements de l'analyse mathématique, nous ne pouvons écarter plus longtemps le problème de la traduction française de Hegel. Notre travail de repérage des relations de Hegel et de Marx avec les mathématiques nous avait conduit à utiliser la traduction de S. Jankelevitch de la seconde édition de Hegel. (En outre, nous pensons que la pédanterie et/ou le mépris des traducteurs [dans lequel nous faisons figurer la paresse pour aller consulter les traductions], sont trop souvent, les explications principales des (re)-traductions). Dans le cas considéré, la fluidité de la traduction de Jankelevitch plaide pour elle-même, surtout si on la rapproche de la

¹²⁴ Nous présentons l'analyse non-standard d'après CE. Edwards, p. 341.

retraduction récente qui est en fait la traduction de la première édition de la Logique, l'édition de 1812, dont le français a, semble-t-il souffert de la fidélité — revendiquée- à Hegel. Néanmoins - et au-delà des faiblesses normales d'une traduction qui est, nécessairement une «approximation» nous devons convenir que cette traduction ne convient guère à notre grille de lecture de Hegel. Le problème essentiel touche la conception même de la logique de Hegel: comment comprendre le moment de la synthèse, du dépassement et comment traduire «aufheben» et «Aufhebung». Si l'on reprend attentivement la citation précédente de Hegel, nous lisons dans la traduction de Jankélévitch que: «Dans ce concept de l'Infini, le quantum s'élève vraiment à une existence qualitative (...) il n'est pas supprimé en tant que tel ou tel quantum mais en tant que quantum tout court». Cette traduction rend notre lecture acrobatique: Hegel semble bien dénier la qualité de nombre des dx , dy . Mais Hegel n'écrit pas (seulement) «est supprimé», il emploie un terme qui signifie «est supprimé, est conservé, est élevé» et même si l'on en croit Heidegger, c'est plutôt le sens de «transformation» qui prédomine, la suppression ne pouvant à la rigueur correspondre qu'au premier terme de la triade à condition de ne pas lui accorder un sens purement négatif (être écarté plutôt que supprime - annihilé). Écoutons la mise en garde d'Heidegger.

«Aufheben signifie d'abord: enlever du sol ce qui y gît. Ce mode d'Aufheben reste pourtant extérieur tant qu'il n'est pas déterminé par un Aufheben signifiant: aufbewahren, conserver, réserver. Et encore cet Aufheben ne peut-il recevoir sa force portante et sa durée propre que s'il provient d'un Aufheben signifiant: élever, transfigurer, anoblir et ainsi: transformer»,

et Hegel lui-même, nous avertit qu'en général:

«Aufheben (assumer) et das Aufgehobene (l'assumé) (l'idéal), c'est là l'un des concepts les plus importants de la philosophie, une détermination fondamentale qui revient absolument partout, et dont le sens doit être appréhendé de manière bien déterminée et surtout bien distingué du rien (Nichts). Ce qui s'assume (sich aufhebt) ne devient pas pour autant un rien. Si rien est un immédiat, un assumé au contraire est un médiatisé; c'est le non-étant, mais comme résultat qui est issue d'un être. Par suite il a encore en soi la détermination dont il provient (herkommt)»,

et il reprend expressément cette affirmation au sujet des dx , dy . En effet si nous reprenons le texte hégélien traitant de la nature des différences infiniment petites, nous voyons Hegel ajouter:

«Mais la précision quantitative demeure, en tant Qu'élément, le principe des quantités, comme on l'avait dit, elle reste impliquée dans leur premier concept»¹²⁵.

Hegel nous indique bien que la «déterminité», la qualité (précision) des dx , dy leur est conservée ce qui justifie pleinement que nous rapprochions ce traitement de celui de l'analyse non-standard qui distingue plusieurs catégories de «nombres». Cette question est capitale d'après Hegel qui soutient que la «Aufhebung» est une détermination fondamentale qui revient absolument partout». D'ailleurs, Hegel jubile en constatant qu'en allemand de nombreux termes ont des déterminations opposées, même s'il n'entend pas en demeurer à cette ambiguïté, jouer sur le double sens. Pour lui, le sens de la «Aufhebung» qui est la clé de la Logique ne peut être éclairé que par le déploiement de celle-ci. On comprend alors que Jean Beaufret ait pu s'exclamer: «Vous savez, il m'a fallu toute la vie pour comprendre quelque chose à Hegel» ou que Martin Heidegger, parlant précisément de l'infini et de la finitude de l'être dans son commentaire de la *Phénoménologie de l'Esprit* en ait tiré un vibrant appel à la «patience»¹²⁶ (...).

Pourtant, nous hasarderons quelques remarques destinées à éclairer notre lecture de Hegel. Tout, d'abord, nous relèverons que la suppression ou négation/conservation ne relève pas de la jonglerie métaphysique: c'est une opération qualifiée de «courante» par J. Piaget et Kuhn a même tenté d'en faire le modèle des révolutions scientifiques: la nouvelle théorie «niant» l'ancienne mais en même temps la conservant comme un cas particulier d'un ensemble plus vaste (les théories de la mécanique céleste étant un archétype en la matière)¹²⁷. Mais nous pensons aussi pouvoir affiner notre présentation grâce à une formalisation réduite. Hegel part de la proposition de Spinoza : *Omnis determinatio est negatio* — que nous rendrions volontiers ainsi : tout énoncé d'une proposition A dit «quelque chose» de la proposition [non-A]. La dialectique de Hegel est alors l'examen des jeux ou des mouvements possibles de A et [non -A]. Hegel, d'ailleurs, prend l'image du levier pour expliquer la *Aufhebung*¹²⁸: Mais [non -A] n'est pas le contraire, la pure négation de A - l'opposé ou l'inverse ne sont définis en mathématiques que pour des lois de composition spécifiées - de sorte que quand Hegel abat ses cartes, l'incompréhension ou l'incrédulité ne sont pas surprenantes: le logicien ne s'est-il pas mué en prestidigitateur ayant plus de cartes dans son jeu qu'il n

¹²⁵ Cf. pour conserver/supprimer Heidegger, p. 13 (préface d'E. Martineau) et Hegel, SL, p. 101, WL, p. 1130, pour la définition de dx/dy Hegel, SL p. 279 WL p. 296.

¹²⁶ Hegel, 1ère édition de la «Logique», (repris également par E. Martineau, p. 14).

¹²⁷ Cf. Piaget, p. 595 et T. Kuhn, 1970.

¹²⁸ Cf. Hegel. SL, p. 102 et WL p. 114.

en avait montré au départ? C'est que [non –A] est multiforme pour le bonheur de ce que Bachelard appelait «la philosophie du non», mais au désespoir du lecteur. Pourtant même si ces règles paraissent (ou sont) souvent arbitraires, nous croyons que la «patience» pour démêler le jeu est récompensée.

Nous pouvons maintenant choisir une traduction pour la «Aufhebung». On sait que les candidatures sont nombreuses mais la rendre d'un mot nous paraît incorrect: c'est à dessein que Hegel a retenu un terme «équivoque», aussi garderons-nous le rapprochement de la suppression et de la conservation et nous rendrons «aufgehobene» (la forme passive ou pronominal) par «supprimé/conservé». (Il existe d'ailleurs des constructions similaires en français, par exemple parmi les sottises à l'égard du discours médical, il en est une qui dit d'un disparu, pour rendre un hommage «ironique» à la médecine: «il est mort guéri»). Au demeurant, nous avons conservé, pour l'essentiel, la traduction de Jankelevitch qui gagnerait seulement à être revue pour les parties les plus mathématiques.

L'analyse non-standard : une postérité mathématique de Hegel?

A présent, peut-on aller plus loin dans le rapprochement entre Hegel et Robinson, entre la suppression/conservation du Quantum et les «nombres non-standards»? Nous pensons que c'est bien le cas; en effet, les historiens des mathématiques n'ont pas manqué de relever les similitudes des définitions de Robinson et d'Euler, or Hegel connaissait Euler et il est significatif qu'il lui adresse peu de critique. Il est donc possible qu'il ait développé sa propre conception à partir des traces que l'on pouvait relever dans Euler (la double nature des différentielles: zéro et zéro qualitatif)¹²⁹. C'est ainsi qu'après avoir longuement cité la méthode d'Euler, Hegel ajoute: «Je m'abstiens de multiplier les citations, celles qui précèdent suffisent à montrer qu'elles contiennent bien le vrai concept de l'infini mais que celui-ci n'est pas mis en relief et conçu dans toute sa précision»; cette proximité du concept est, sans doute, le plus grand compliment que Hegel pouvait décerner. Mais cette inspiration eulérienne commune ne constitue encore qu'un lien assez lâche et nous avancerons une hypothèse encore plus forte. Abraham Robinson a reçu une formation de logicien et il a été l'élève de A. Fraenkel, or ce dernier appartenait à la célèbre «école de Marburg», groupant philosophes et mathématiciens. Cette école est qualifiée de néo-kantienne, mais il est frappant de constater que dans des temps où s'intéresser à Hegel, c'était s'exposer à la «risée générale», ses principaux représentants lui ont manifesté beaucoup d'attention. Précisément, le chef de file de l'école de Marburg, H. Cohen, a consacré un ouvrage au calcul différentiel dans lequel il entend montrer la

¹²⁹ Cf. infra «Sur le calcul des zéros de Leonard Euler» pp. 303-8 et Hegel. SL p. 288 et W.L., p. 304.

«supériorité de la méthode transcendantale sur la méthode métaphysique», c'est de son interprétation du calcul différentiel par rapport à celle de Hegel. En effet, d'après H. Cohen, c'est dans la critique de l'infinitésimal que Hegel s'est «exposé à son naufrage», mais ajoute-t-il, «la critique hégélienne toute défectueuse et fautive qu'elle est, contient pourtant des pensées profondes. Elle a le mérite de souligner l'importance pour ce concept de la qualité, du moment qualitatif de la quantité¹³⁰. Si nous n'avons, ainsi, aucune indication d'une imprégnation hégélienne directe de Robinson, par contre, nous tenons pour hautement probable qu'il ait connu le livre de Cohen et, littéralement, le processus intellectuel aurait pu avancer par le côté négatif¹³¹.

Les règles de calcul sur les différentielles

L'analyse non-standard permet aujourd'hui de justifier la distinction quantum (nombres traditionnels)/différentielles (parties non-standards des nombres) opérée par Hegel. Mais celui-ci a poussé plus loin son examen du calcul différentiel pour s'intéresser à ses règles particulières; en effet «le calcul infinitésimal autorise, exige même des procédés que les mathématiques, dans leurs opérations sur les grandeurs finies sont obligées de rejeter»¹³². Ainsi après avoir cherché à définir la nature des différentielles par un examen poussé du concept de nombre, il examine les règles que l'on doit employer pour «multiplier entre elles grandeurs finies et grandeurs infinies»¹³³. Il s'agit là essentiellement de l'abandon des puissances de dx - dy , des «infiniment petits» par rapport aux grandeurs finies. L'étonnement des mathématiciens du XVIII^e venaient de ce qu'une telle procédure manifestement incorrecte, eu égard à leur définition des grandeurs concernées, donnât des résultats non pas approchés mais «exacts». Parmi les «explications» avancées, Hegel rejette, d'abord, vivement celle de J. C. Wolf, le disciple infidèle de Leibniz, d'après laquelle les infiniment petits étaient négligés pour leur insuffisance relative, «car les mathématiques ne peuvent s'accommoder de telles approximations» ; il ne retient pas davantage — et daigne à peine les

¹³⁰ Nos développements - en particulier le choix des citations de H. Cohen - s'appuient sur Dussort 1963, pp. 115-117. Indiquons pour l'histoire des idées que c'est F. Lange qui fit attribuer une chaire à Marburg à H. Cohen, cf. note 23 p. 24 pour les rapports Lange - Marx et Lange - Nietzsche.

¹³¹ Nous tenons de Raimon que les intellectuels du PSUC (le parti communiste de Catalogne) étudiaient «la pensée de Marx», sous le régime franquiste dans les années 55- 65, dans l'ouvrage du même nom de J.Y. Le Calvez, un jésuite en rien marxiste. (Raimon a été la figure de proue de la «nova canço catalana», expression de la résistance catalane au franquisme des années 60 et 70).

¹³² Hegel. SL. pp. 265, WL p. 281

¹³³ Ibidem, SL p. 266, WL p. 281.

mentionner — les «explications» irrationnelles. Pour Hegel, l'explication est ailleurs: «la raison de les laisser de côté est tirée du caractère de leur quantum» ou «des termes sont laissés de côté, non comme insignifiants du point de vue de la grandeur, mais comme insignifiants sous le rapport de la qualité»¹³⁴. Cette présentation hégélienne a été vivement critiquée, y compris par des auteurs qui veulent bien, par ailleurs, reconnaître quelques mérites à Hegel. J. T. Desanti parle d'un «procédé étrange», d'une «étrange soudure», d'une «opération spéculative», Kolman et Janovskaja sont plus radicaux — ou plus explicites — il s'agit, d'après eux de «trucs et d'échappatoires»¹³⁵.

Le procédé décrit par Hegel est-il donc si incompréhensible mathématiquement, si étranger au raisonnement mathématique? Nous ne le pensons pas et nous le tenons pour comparable à l'analyse non-standard. En effet, celle-ci pose que les sommes, différences et produits d'infinitésimales sont des infinitésimales tandis que le produit d'une infinitésimale et d'un nombre fini est infinitésimal. Ce théorème permet de développer le calcul des dérivées de la façon suivante : deux éléments $x, y \in \mathbb{R}$ sont appelés infiniment voisins, (notés : $x \sim y$), si leur différence $x - y$ est infinitésimale. Et le théorème de la partie standard affirme que tout nombre hyperréel fini x est infiniment voisin d'un nombre unique réel r . Ce nombre réel r ($r = x$) est appelé la «partie standard de x » (noté $= r = st(x)$). Dans ces notations, les infinitésimales Δx sont infiniment voisines de 0: $\Delta x = 0$, et l'on dira qu'une fonction f d'une variable réelle est différentiable pour $a \in \mathbb{R}$ pourvu que le quotient

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

soit fini et ait la même partie standard pour toute infinitésimale $\Delta x = 0$. La dérivée pour a est alors:

$$f'(a) = st \left| \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \right|$$

Dans cette définition qui, évidemment, aboutit aux résultats traditionnels, on obtient la dérivée directement en prenant la partie standard et en écartant les infinitésimales, cad en distinguant suivant la nature des termes; c'est dire si la similitude entre les régies décrites par Hegel et celles de l'analyse non-standard est profonde. L'aveuglement à rencontre

¹³⁴ Ibidem. SL. pp. 214-215. WL p. 312.

¹³⁵ J.T. Desanti, p. 61; Kolman et Janovskaia, p. 247

de Hegel est d'autant moins compréhensible que les opérations sur les nombres hyperréels présentent quelques analogies avec celles sur les nombres imaginaires et ce rapprochement aurait pu inciter à une condamnation moins sommaire. D'ailleurs, c'est Leibniz qui signalait cette analogie entre infiniment petits et imaginaires et peut-être Hegel poursuit-il simplement l'idée de Leibniz.

Nous en aurons terminé avec le calcul différentiel de Hegel en mentionnant un passage qui devrait retenir l'attention des économistes et les conduire à examiner les possibilités d'introduire l'analyse non-standard dans la présentation du raisonnement marginal. En effet, Hegel, développant sa conception de la nature des différentielles, s'intéresse à leur représentation. Voici ses remarques:

On peut ajouter à ce propos que, puisque c'est seulement en raison du développement qu'on admet un accroissement qui n'est pas un quantum, il serait on ne peut plus indiqué de prendre comme tel le 1 (l'unité), puisque celui-ci ne figure toujours dans le développement qu'en qualité de facteur, et que le facteur 1 répond justement au but qui consiste à exclure la nécessité de poser une précision et une variation quantitative du fait de l'accroissement ; alors que dx , qui suggère la fausse idée d'une différence quantitative, et d'autres signes, comme i , entachés de l'inutile apparence de généralité, ont toujours l'aspect extérieur d'un quantum et de ses puissances et visent à s'imposer comme tels et à imposer en même temps la peine de les éliminer ou de les mettre de côté¹³⁶.

On retrouve ici la racine de l'ambiguïté des présentations du raisonnement marginal: «littérairement», le coût marginal est le coût de la dernière unité produite, mathématiquement c'est la limite de $\Delta C/\Delta Q$, c'est-à-dire la dérivée de la fonction de coût total. Dès le départ, l'exposé bute sur la continuité et/ou la discrétion des grandeurs économiques. Cela provient d'une conception insuffisante des accroissements considérés que l'analyse non-standard pourrait améliorer.

Ainsi l'analyse non-standard oblige à une relecture de Hegel dans la mesure où elle inscrit manifestement dans le champ mathématique les remarques de Hegel. Nous avons montré quelle était la fécondité de l'approche hégélienne basée sur l'analyse des concepts mis en œuvre dans les mathématiques dans le domaine même des mathématiques. Il est important de souligner que cette analyse repose une profonde

¹³⁶ Cf. les citations de Leibniz, supra, pp. 56-58. La citation de Hegel est tirée de SL, i. 314, WL pp. 332-333. Celles de C. Menger sont pp. 40-41-42.

connaissance de la genèse et philosophique et mathématique de ces concepts. Il serait intéressant de poursuivre cette lecture de Hegel pour montrer précisément les mécanismes de cette approche logico-génétique ; là aussi des rapprochements inattendus, en particulier avec l'approche constructiviste contemporaine des mathématiques ne manqueraient pas d'être fructueux¹³⁷. Il faut signaler, en particulier, dans ce contexte, la relation qu'établit Hegel entre le développement des mathématiques et leur correspondance avec le réel. Nous pourrions, néanmoins, aborder marginalement quelques-uns de ces thèmes en situant les MMM par rapport à Hegel. En effet, l'examen détaillé de Hegel n'est nullement une digression par rapport aux MMM mais est, au contraire, le prérequis pour les aborder.

¹³⁷ Cf. R. Apery, 1982.